

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

ДИНАМИКА

Методические указания к практическим занятиям
и выполнению контрольной работы по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
для студентов направлений

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2025

Введение

Теоретическая механика является основой многих современных инженерных дисциплин. Без глубокого усвоения положений и методов теоретической механики невозможно дальнейшее изучение большинства технических наук. Кроме того, в процессе изучения теоретической механики студенты впервые используют математический аппарат для решения конкретных задач.

Особое место в изучении курса занимает решение задач, которое позволяет закреплять и углублять теоретические знания, развивает навыки самостоятельного мышления, помогает овладению математическими методами.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов, и могут быть использованы преподавателями при проведении практических занятий и контрольных работ по теоретической механике при изучении раздела «Динамика».

Методические указания включают в себя сведения из теории, примеры и 10 различных вариантов заданий по темам: введение в динамику точки, динамика системы материальных точек: теорема о движении центра масс системы, теорема об изменении количества движения системы, теорема об изменении момента количества движения системы, теорема об изменении кинетической энергии системы, общее уравнение динамики.

1. Введение в динамику материальной точки.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Материальной точкой называется материальное тело, имеющего массу, размерами которого при изучении движения можно пренебречь

В основе динамики лежат следующие три закона:

1) *Закон инерции*: материальное тело (точка) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не заставят его изменить это состояние.

Система отсчёта, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной*.

2) *Основной закон*. Ускорение материального тела (точки) пропорционально приложенной к нему силе (системе сил) и имеет одинаковое с ней направление

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (1)$$

3) *Закон равенства действия и противодействия*. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

В динамике решаются две основные задачи:

а) зная закон движения тела (точки), определить действующие на него силы;

б) зная действующие на точку силы, определить закон движения тела (точки).

Если ввести неподвижную прямоугольную систему координат Oxy и спроектировать на её оси уравнение (1), то получим

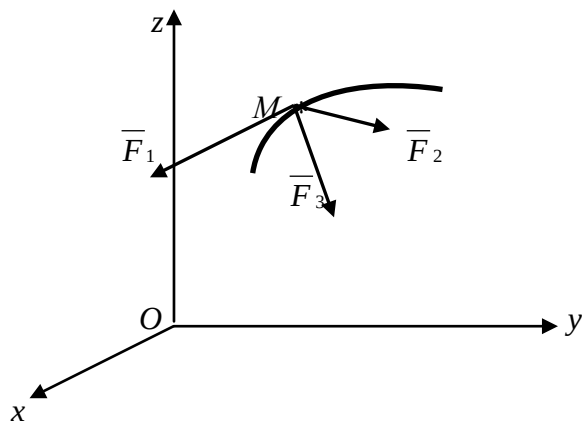


Рис.1

дифференциальные уравнения движения тела (точки) в проекциях на оси координат:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m \frac{dV_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m \frac{dV_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz} \quad (2)$$

или

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kz} \quad (3)$$

Эти уравнения позволяют решать как первую, так и вторую задачи динамики.

Пример 1. Пусть точка массы m выброшена из начала координат O с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту.

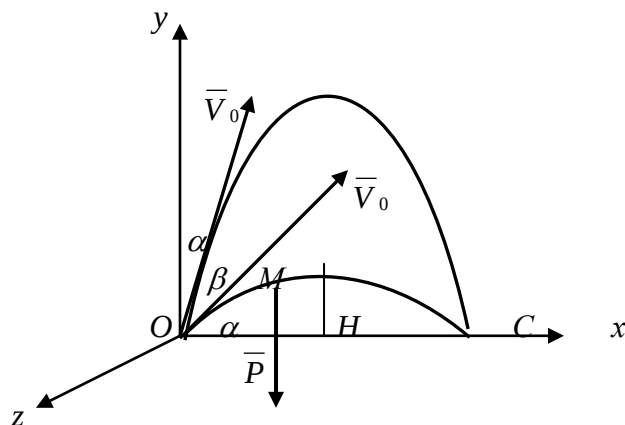


Рис. 2

Решение.

Пусть сила тяжести будет постоянной $P = mg = \text{const}$ и сила сопротивления воздуха равна нулю ($\bar{R} = 0$). На точку M действует только сила тяжести.

Уравнения движения (3) точки M в данном случае имеют вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{dV_x}{dt} = 0; \quad \frac{dV_y}{dt} = -g; \quad \frac{dV_z}{dt} = 0 \quad (5)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнения (5) получим:

$$V_x = C_1, \quad V_y = -gt + C_2, \quad V_z = C_3 \quad (6)$$

Используя начальные условия

$$t = 0; \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha, \quad V_z = 0, \quad (7)$$

найдём:

$$C_1 = V_0 \cos \alpha, \quad C_2 = V_0 \sin \alpha, \quad C_3 = 0 \quad (8)$$

Подставляя вычисленные значения C_1, C_2, C_3 в (6), получим:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad V_z = 0. \quad (9)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнения (9), имеем (10)

$$x = V_0 t \cos \alpha + C_4, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5, \quad z = C_6. \quad (11)$$

Используя начальные условия (7), найдём

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad (12)$$

Таким образом, уравнения движения точки имеют вид:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \quad (13)$$

Имея уравнения движения, можно найти основные характеристики движения:

1) исключив из уравнений (13) параметр t , получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (14)$$

2) приравняв полученное выражение нулю (момент вылета и момент приземления точки), получим:

$$y = 0 \rightarrow x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g}, \quad (15)$$

отсюда горизонтальная дальность:

$$L = OC = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (16)$$

Наибольшая дальность будет при $\alpha = 45^\circ$ (когда $\sin 2\alpha = 1$).

3) в силу симметрии траектории (параболы), вершина её имеет абсциссу:

$$x = \frac{L}{2} = \frac{V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha,$$

тогда высота траектории

$$H = y_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (17)$$

4) при $x_{\max} = L$ из (13) получаем время полёта:

$$x = L = V_0 t \cos \alpha \rightarrow t_n = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha \quad (18)$$

Таким образом, при $\alpha = 45^\circ$ имеем:

$$L = \frac{V_0^2}{g}, \quad H = \frac{V_0^2}{4g}, \quad t_n = \frac{V_0}{g} \sqrt{2}. \quad (19)$$

Пример 2. На вертикальном участке AB трубы на груз D массой m действует сила тяжести и сила сопротивления R ; расстояние от точки A , где $V = V_0$, до точки B равно l . На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$.

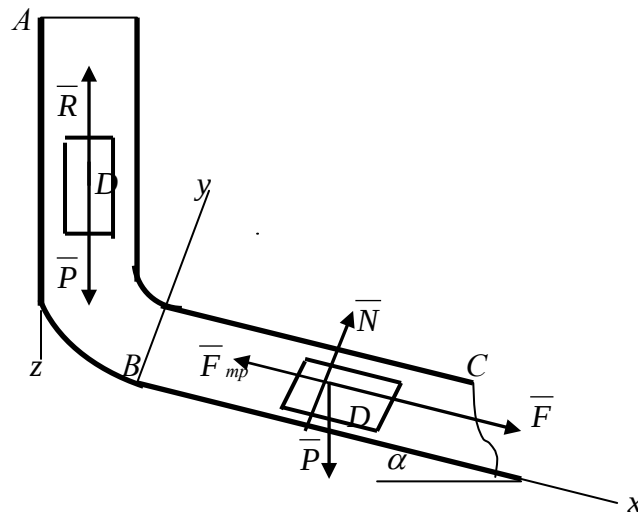


Рис.3

Дано: $m = 2 \text{ кг}$, $R = \mu V^2$, где $\mu = 0,4 \text{ кг/м}$, $V_0 = 5 \text{ м/с}$, $l = 2,5 \text{ м}$, $F_x = 16 \sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ - закон движения груза на участке BC .

Решение.

1) Рассмотрим движение груза на участке AB , считая груз материальной точкой. На рисунке 3 груз изображён в произвольном положении, и действующие на него силы: $\vec{P} = m\vec{g}$ и $\vec{R}$. Введём в рассмотрение ось Az , и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dV_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz} \rightarrow m \frac{dV_z}{dt} = P - R. \quad (20)$$

Воспользуемся равенством:

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dz} \frac{dz}{dt} = V_z \frac{dV_z}{dz}. \quad (21)$$

Тогда уравнение (20) можно записать в виде:

$$mV_z \frac{dV_z}{dz} = mg - \mu V^2 \quad (22)$$

Учитывая, что $V_z = V$, получим

$$mV \frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \quad \text{или} \quad V \frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - V^2 \right) \quad (23)$$

Обозначим:

$$a = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1}, \quad b = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2 / \text{с}^2 \quad (g = 10 \text{ м} / \text{с}^2) \quad (24)$$

Тогда уравнение (22) примет вид:

$$V \frac{dV}{dz} = -a(V^2 - b) \quad (25)$$

Разделяя в уравнении (25) переменные и интегрируя затем, получим:

$$\frac{2VdV}{V^2 - b} = -2adz \rightarrow \ln(V^2 - b) = -2az + C_1 \quad (26)$$

Из начальных условий (при $z = 0$ $V = V_0$) следует: $C_1 = \ln(V_0^2 - b)$.

Тогда из равенства (26) следует:

$$\ln(V^2 - b) = -2az + \ln(V_0^2 - b) \rightarrow \ln \frac{V^2 - b}{V_0^2 - b} = -2az \rightarrow \frac{V^2 - b}{V_0^2 - b} = e^{-2az}, \quad (27)$$

откуда

$$V^2 = b + (V_0^2 - b)e^{-2az} \quad (28)$$

Полагая в равенстве (28) $z = l = 2,5 \text{ м}$ и заменяя a и b их значениями из (24), определим скорость груза в точке B ($V_0 = 5 \text{ м} / \text{с}$ и $e \approx 2,7$)

$$V_B^2 = 40,7 \rightarrow V_B = 6,4 \text{ м} / \text{с}. \quad (29)$$

2) Рассмотрим теперь движение груза на участке BC ; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P}, \overline{F}, \overline{F}_{\text{мр}}$ и $\overline{N}$ - сила реакции связи.

Введём прямоугольную систему координат Bxy и составим дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси системы координат Bxy :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{\text{мрх}} + F_x, \quad m \frac{dV_y}{dt} = P_y + N_y + F_{\text{мры}}$$

Так как $V_x = V$, $V_y = 0$, $P_x = mg \sin \alpha$, $P_y = -mg \cos \alpha$, $N_x = 0$, $N_y = N$, $F_{\text{мрх}} = -F_{\text{мр}} = -fN$, $F_{\text{мры}} = 0$, то

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \alpha - fN + 16 \sin(4t), \quad 0 = -mg \cos \alpha + N \quad (30)$$

Выражая из второго уравнения (30) N и подставляя $N = mg \cos \alpha$ в первое уравнение системы (30) получим:

$$m \frac{dV}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t) \quad (31)$$

Разделив равенства (31) на m , вычислим

$$g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 10(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2; \quad \frac{16}{m} = 8. \quad (32)$$

Подставив (32) в (30), получим:

$$\frac{dV}{dt} = 3,2 + 8\sin(4t) \quad (33)$$

Умножая обе части уравнения (33) dt и интегрируя затем, найдём:

$$V = 3,2t - 2\cos(4t) + C_2 \quad (34)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B , считая в этот момент времени $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $V = V_0 = V_B$, где V_B даётся равенством (29), из (34) найдём

$$C_2 = V_B + 2\cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4$$

При найденном значении C_2 , из (34) следует

$$V = V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 2\cos(4t) + 8,4 \quad (35)$$

Умножая обе части (35) на dt и интегрируя затем, найдём:

$$x = 1,6t^2 - 0,5\sin(4t) + 8,4t + C_3. \quad (36)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$.

Таким образом, искомый закон движения груза на участке BC будет

$$x = 1,6t^2 + 8,4t - 0,5\sin(4t),$$

где x – в метрах, t – в секундах.

2. Теорема о движении центра масс системы.

Совокупность материальных точек (или тел), когда положение или движение каждой точки зависит от положения, или движения остальных точек называется *механической системой*.

Движение системы зависит от её суммарной массы M и её распределения. Каждая точка системы с массой m_k может быть охарактеризована своим радиус-вектором $\bar{r}_k(x_k, y_k, z_k)$.

Центром масс системы называется точка C , радиус-вектор которой определяется формулой

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M},$$

или

$$x_k = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_k = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_k = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}. \quad (1)$$

Пусть система будет *неизменяемой*. В этом случае её называют *абсолютно твёрдым телом* (или *телом*).

Уравнение движения твёрдого тела (неизменяемой системы):

$$M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e, \quad (2)$$

Произведение суммарной массы M системы на ускорение её центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил $\overline{F}_k^e$. (теорема о движении центра масс системы).

В проекциях на оси системы координат (2) имеет вид:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \quad (3)$$

Эти равенства представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на оси системы координат $Oxyz$.

Пример 3. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3 , движущейся вдоль горизонтальных направляющих. В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющих собой окружности радиусов r и R , по законам: $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\varphi_2 = f_2(t)$.

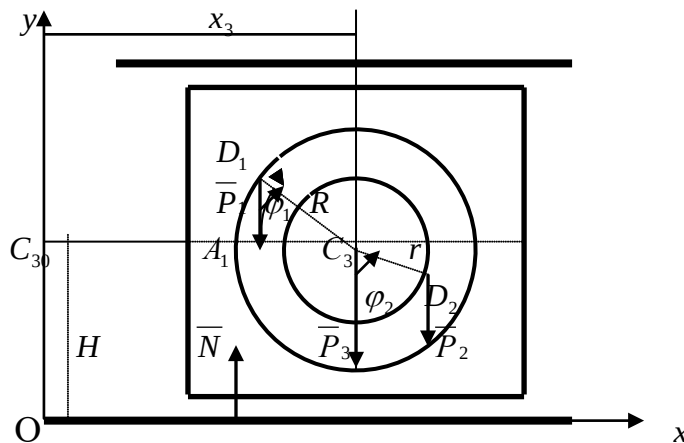


Рис.4

Дано: $m_1 = 6 \text{ кг}$, $m_2 = 8 \text{ кг}$, $m_3 = 12 \text{ кг}$, $r = 0,6 \text{ м}$, $R = 1,2 \text{ м}$, $\varphi_1 = \pi \text{ рад}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}(1-t) \text{ рад}$ (t – в секундах).

Определить: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты; $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение.

Изобразим действующие на механическую систему в произвольном положении внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ и суммарную (полную) реакцию направляющих $\overline{N}$. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox была направлена по направлению движения плиты, а ось Oy проходила через точку C_{30} , где находился центр масс плиты в момент времени $t_0 = 0$.

а) Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось Ox :

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e \rightarrow M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0, \quad (4)$$

так как $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (4), найдём, что $M \frac{dx_C}{dt} = C_1$, то есть проекция скорости центра масс системы на ось Ox есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $V_{Cx} = 0$ (по условию), то $C_1 = 0$.

Интегрируя уравнение $M \frac{dx_C}{dt} = 0$, получим

$$Mx_C = \text{const}, \quad (5)$$

то есть центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Найдём значение Mx_C . Из рисунка 4 следует, что в произвольный момент времени абсциссы грузов D_1 и D_2 равны соответственно:

$$x_1 = x_3 - R \cos \varphi_1, \quad x_2 = x_3 + r \sin \varphi_2.$$

Так как из формулы (1), определяющей координату x_C центра масс системы

$$Mx_C = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3,$$

то

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1 R \cos(\pi t) + m_2 r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right). \quad (6)$$

В соответствии с равенством (5) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положении будут равны. Следовательно, учитывая, что при $t_0 = 0$ $x_3 = 0$, получим

$$-m_1 R + m_2 r = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1 R \cos(\pi t) + m_2 r \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right). \quad (7)$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3 - закон движения плиты.

б) Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось Oy :

$$M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e \rightarrow M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = N - P_1 - P_2 - P_3 \quad (8)$$

Отсюда

$$N = M \frac{d^2 y_C}{dt^2} + (m_1 + m_2 + m_3)g. \quad (9)$$

По формуле (1), определяющей ординату y_C центра масс системы, имеем:

$$My_C = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 \quad (10)$$

Из рисунка 4 следует:

$$y_1 = H + R \sin \varphi_1, \quad y_2 = H - r \cos \varphi_2, \quad y_3 = H = OC_{30} = \text{const},$$

тогда

$$My_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R \sin(\pi t) - m_2 r \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдём

$$M \frac{dy_C}{dt} = m_1 R \pi \cos(\pi t) - m_2 r \left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -m_1 R \pi^2 \sin(\pi t) + m_2 r \left(\frac{\pi^2}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Подставив это значение $M \frac{d^2 y}{dt^2}$ в уравнение (9), определим искомую зависимость N от времени t .

$$N = 254,8 - 1,2\pi^2 \left[6 \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right],$$

где t - в секундах, N - в ньютонах.

3. Теорема об изменении количества движения системы

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость её центра масс:

$$\bar{Q} = M \bar{V}_C \quad (1)$$

Отсюда и уравнения движения системы следует:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \quad (2)$$

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил (теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме).

Уравнение (2) в проекциях на оси системы координат $Oxyz$:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \quad (3)$$

Пример 4. В центре тяжести A тележки массой m_1 , движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплен невесомый стержень AD длиной l с грузом D массой m_2 на конце. В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость тележки $u = u_0$, стержень AD начинает вращаться вокруг оси A по закону $\varphi = \varphi(t)$.

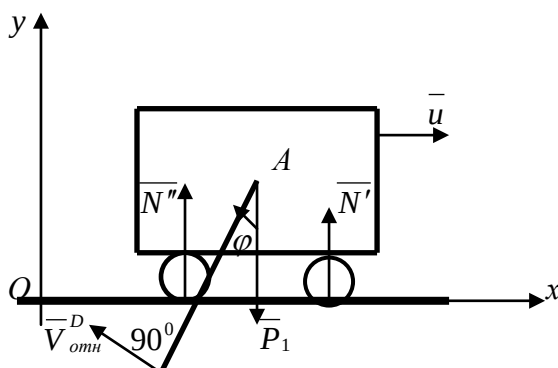




Рис. 5

Дано: $m_1 = 24 \text{ кг}$, $m_2 = 12 \text{ кг}$, $u_0 = 0,5 \text{ м/с}$, $l = 0,6 \text{ м}$, $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}(1 + 2t^3) \text{ рад}$, (t - в сек.)

Определить: $u = f(t)$ - закон изменения скорости тележки.

Решение.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки и груза D в произвольном положении. На рисунке 5 изображены действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ и реакции плоскости $\bar{N}_1', \bar{N}_2'$.

Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox была горизонтальна.

Для определения u воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\bar{Q}$ в проекции на ось Ox .

Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны, то $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$, и из формулы (3) следует:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0 \rightarrow Q_x = C \quad (4)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$\bar{Q} = \bar{Q}^T + \bar{Q}^D, \quad \bar{Q}^T = m_1 \bar{u}, \quad \bar{Q}^D = m_2 \bar{V}^D,$$

где $\bar{Q}, \bar{Q}^T, \bar{Q}^D$ - количества движения соответственно механической системы, тележки и груза D ($\bar{u}$ - скорость тележки, $\bar{V}^D$ - скорость груза по отношению к осям системы координат Oxy). Тогда из равенства (4) следует, что

$$Q_x^T + Q_x^D = C \rightarrow m_1 u_x + m_2 V_x^D = C \quad (5)$$

В системе координат Oxy : $u_x = u$. Для определения V_x^D рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при вращении стержня AD вокруг оси A), а движение самой тележки – переносным движением.

Тогда

$$\bar{V}^D = \bar{V}_{\text{пер}}^D + \bar{V}_{\text{отн}}^D \rightarrow V_x^D = V_{\text{пер}x}^D + V_{\text{отн}x}^D \quad (6)$$

Но $\bar{V}_{\text{пер}}^D = \bar{u}$ и, следовательно, $V_{\text{пер}x}^D = u_x = u$. Вектор $\bar{V}_{\text{отн}}^D$ направлен перпендикулярно стержню и численно равен:

$$V_{\text{отн}}^D = l \cdot \omega_{AD} = l \cdot \dot{\varphi} = 2l\pi^2$$

С учётом знака $\dot{\varphi}$ имеем: $V_{\text{отн}x}^D = -V_{\text{отн}}^D \cdot \cos \varphi$, тогда из равенства (6) получим:

$$V_x^D = u - V_{\text{отн}}^D \cdot \cos \varphi = u - 2l\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) \quad (7)$$

Подставляя (7) в равенство (5), получим:

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2l\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = C \quad (8)$$

Постоянную величину C определим из начального условия: при $t = 0$ $u = u_0$.
Отсюда

$$C = (m_1 + m_2)u_0$$

Тогда из равенства (8) получим:

$$(m_1 + m_2)u - 2m_2 l\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0.$$

Отсюда находим искомую зависимость скорости тележки от времени:

$$u = u_0 + \frac{2l\pi m_2}{m_1 + m_2} t^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) \quad (9)$$

Подставив сюда значения соответствующих величин, находим:

$$u = 0,5 + 0,4\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) \text{ м/с.}$$

4. Теорема об изменении кинематического момента системы.

Главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом) относительно данного центра O называется векторная величина $\bar{K}_O$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы, относительно этого центра.

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O (m_k \bar{V}_k), \quad (1)$$

или в проекциях на оси системы координат Oxy :

$$K_x = \sum_{k=1}^n m_x (m_k \bar{V}_k), \quad K_y = \sum_{k=1}^n m_y (m_k \bar{V}_k), \quad K_z = \sum_{k=1}^n m_z (m_k \bar{V}_k). \quad (2)$$

Кинетический момент является характеристикой вращательного движения системы. Можно показать, что

$$K_z = J_z \omega, \quad (3)$$

кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения Oz равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость тела.

Теорема об изменении кинетического момента системы: производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O (\bar{F}_k^e) \quad (4)$$

В проекциях на оси системы координат Oxy уравнение (4) запишется в виде:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^n m_x (\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^n m_y (\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (\bar{F}_k^e) \quad (5)$$

Пример 5. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2l$ и l), имеющая массу m_1 , жёстко скреплена с вертикальным

валом и вращается вместе с ним вокруг оси Oz с угловой скоростью ω_0 . В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент M , направленный противоположно ω_0 ; одновременно груз D массой m_2 , находящийся в жёлобе AB в точке C , начинает двигаться по жёлобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

Дано: $m_1 = 16 \text{ кг}$, $m_2 = 10 \text{ кг}$, $l = 0,5 \text{ м}$, $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$, $s = 0,4t^2$ (s - в метрах, t - в секундах), $M = 6t \text{ н/м}$.

Определить: $\omega = f(t)$ - закон изменения угловой скорости платформы.

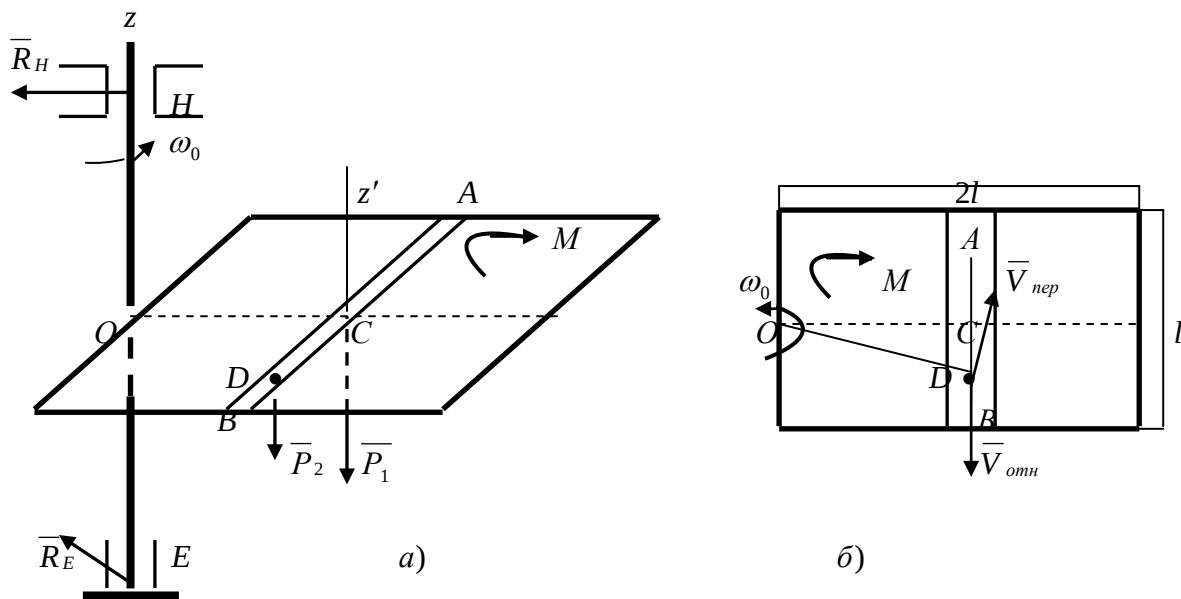


Рис.6

Решение.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D . Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси Oz (5):

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e).$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, реакции $\bar{R}_E, \bar{R}_H$ и вращающий момент M . Так как силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ параллельны оси Oz , а реакции $\bar{R}_E, \bar{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси Oz равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (то есть против хода часовой стрелки), получим:

$$\sum_{k=1}^n m_k (\bar{F}_k^e) = -M = -6t,$$

тогда

$$\frac{dK_z}{dt} = -6t \quad (6)$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении, и интегрируя

его затем, получим:

$$K_z = -6 \cdot \frac{t^2}{2} + C \rightarrow K_z = -3t^2 + C. \quad (7)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_{\text{я}} = K_z^{nl} + K_z^D, \quad (8)$$

где K_z^{nl} и K_z^D - кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси Oz , то

$$K_z^{nl} = J_z \omega \quad (9)$$

Значение момента инерции J_z найдём с помощью теоремы Гюйгенса:

$$J_z = J_{Cz'} + m_1(OC)^2 = J_{Cz'} + m_1 l^2, \quad (10)$$

где $J_{Cz'}$ - момент инерции платформы относительно оси Cz' , параллельной оси Oz и проходящей через центр C платформы.

Известно, что момент инерции прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2 массой m_1 относительно оси Cz' , перпендикулярной пластине и проходящей через её центр масс C , равен:

$$J_{Cz'} = m_1 \frac{a_1^2 + a_2^2}{12} \quad (11)$$

В нашем случае $a_1 = 2l$, $a_2 = l$. тогда

$$J_{Cz'} = m_1 \frac{(2l)^2 + (l)^2}{12} = \frac{5}{12} m_1 l^2. \quad (12)$$

Отсюда

$$J_z = \frac{5}{12} m_1 l^2 + m_1 l^2 = \frac{17}{12} m_1 l^2 \quad (13)$$

Следовательно,

$$K_z^{nl} = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega. \quad (14)$$

Для определения K_z^D рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси Oz переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза D равна:

$$\bar{V} = \bar{V}_{\text{отн}} + \bar{V}_{\text{пер}} \quad (15)$$

Так как груз D движется по закону $s = CD = 0,4t^2$, то

$$V_{\text{отн}} = \dot{s} = 0,8t \quad (16)$$

На рисунке 5б вектор $\bar{V}_{\text{отн}}$ изображён с учётом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s} < 0$ направление $\bar{V}_{\text{отн}}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω , изображаем вектор $\bar{V}_{\text{пер}} (\bar{V}_{\text{пер}} \perp OD)$; численно

$$V_{\text{пер}} = \omega \cdot OD.$$

Тогда по теореме Вариньона (см. Статика) имеем:

$$\begin{aligned} K_z^D &= m_z (m_2 \bar{V}) = m_z (m_2 \bar{V}_{\text{отн}}) + m_z (m_2 \bar{V}_{\text{пер}}) = -m_2 V_{\text{отн}} \cdot OC + m_2 V_{\text{пер}} \cdot OD = \\ &= -m_2 \cdot 0,8tl + m_2 \omega (OD)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Из прямоугольного треугольника OCD (рис.6б) следует:

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 \rightarrow OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0,16t^4 \quad (18)$$

Подставляя (18) в равенство (17), а затем значения K_z^{nl} и K_z^D из (17) и (14) в равенство (8), получим с учётом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega + m_2 \omega (l^2 + 0,16t^4) - m_2 (0,8t) l = (8,17 + 1,6t^4) \omega - 4t. \quad (19)$$

Тогда равенство (7) примет вид:

$$(8,17 + 1,6t^4) \omega - 4t = -3t^2 + C \quad (20)$$

Постоянную интегрирования C определяем по начальным условиям: при $t = 0$ $\omega = \omega_0$. Тогда $C = 8,17\omega_0 = 16,34$.

Таким образом, искомая зависимость ω от t имеет вид:

$$\omega = \frac{16,34 + 4t - 3t^2}{8,17 + 1,6t^4},$$

где t - в секундах, ω - c^{-1} .

5. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Скалярная величина T , равная сумме кинетических энергий всех точек системы, называется *кинетической энергией системы*.

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \quad (1)$$

Кинетическая энергия является характеристикой поступательного и вращательного движения системы. На её изменение влияет действие внешних сил и так как она является скаляром, то не зависит от направления движения частей системы.

Кинетическая энергия для поступательного движения системы равна половине произведения массы системы на квадрат скорости центра масс:

$$T_{пост} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n m_k) V_C^2 = \frac{1}{2} M V_C^2 \quad (2)$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

$$T_{вр} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n m_k h_k^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (3)$$

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении равна сумме энергии поступательного движения и энергии вращательного движения.

$$T_{пл.пар} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad (4)$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы: изменение кинетической энергии системы при некотором её конечном перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i \quad (5)$$

(Для неизменяемой системы $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$, тогда $T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e$).

Пример 6. Механическая система состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами R_3 и r_3 и радиусом инерции ρ_3 относительно оси вращения, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру Е блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жёсткости c ; её начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки её приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8 \text{ кг}$, $m_2 = 0$, $m_3 = 4 \text{ кг}$, $m_4 = 0$, $m_5 = 10 \text{ кг}$, $R_3 = 0,3 \text{ м}$, $r_3 = 0,1 \text{ м}$, $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$, $f = 0,1$; $c = 240 \text{ н/м}$, $M = 0,6 \text{ нм}$, $F = 20(3 + 2s) \text{ н}$, $s_1 = 0,2 \text{ м}$.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

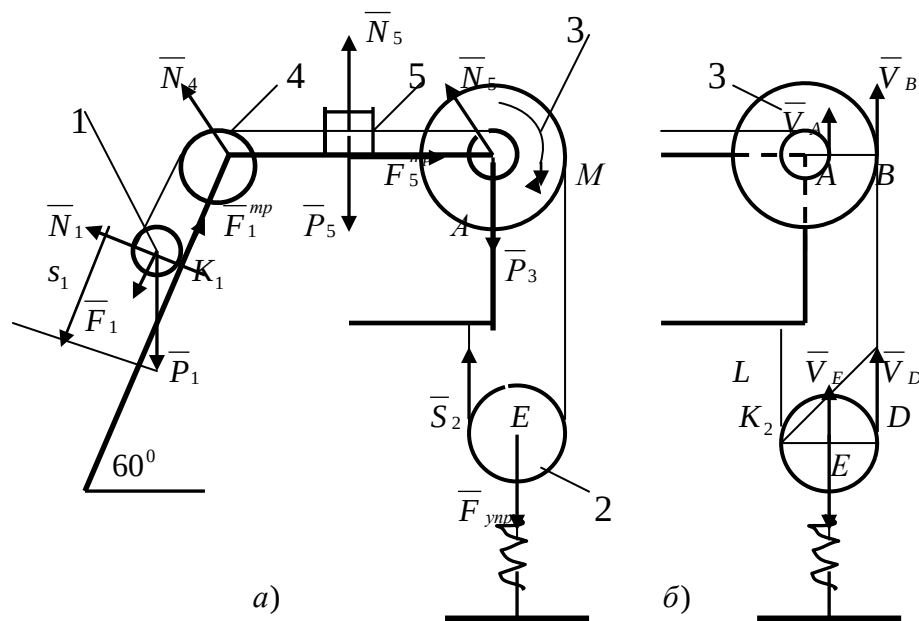


Рис.7

Решение.

1) Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весовых тел 1,3,5 и невесомых тел 2,4, соединённых нитями. На рисунке 7 изображены действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}$, $\bar{F}_{yup}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$, реакции $\bar{N}_1, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$, натяжение нити $\bar{S}_2$, силы трения $\bar{F}_1^{mp}, \bar{F}_2^{mp}$, и момент M .

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e \quad (6)$$

2) Определим T_0 и T . Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 \quad (7)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2; \quad T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2 \quad (8)$$

Все входящие в (8) скорости надо выразить через искомую угловую скорость ω_3 . Для этого предварительно заметим, что $V_{C_1} = V_5 = V_A$, где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1 . Тогда

$$V_{C_1} = V_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1} \quad (9)$$

Кроме того, входящие в (8) моменты инерции имеют значения:

$$J_{C_1} = 0,5 m_1 r_1^2; \quad J_3 = m_3 \rho_3^2. \quad (10)$$

Подставив все величины (9) и (10) в равенства (8), а затем, используя равенство (7), получим окончательно:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (11)$$

3) Теперь найдём сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдёт путь s_1 . Введя обозначение: s_5 – перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинение пружины, получим:

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3+2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2); \quad A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ; \quad A(M) = -M\varphi_3; \\ A(\bar{F}_5^{mp}) = -F_5^{mp} s_5 = -f P_5 s_1; \quad A(\bar{F}_{ypr}) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2). \quad (12)$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2 , где приложены силы $\bar{N}_1, \bar{F}_1^{mp}$ и $\bar{S}_2$ – мгновенные центры скоростей, точки, где приложены силы $\bar{P}_3, \bar{N}_3$ и $\bar{P}_4$ – неподвижны, а реакция $\bar{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условию $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E – (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1 ; для этого учтём, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как $V_{C_1} = V_A$, то

$$\omega_3 = \frac{V_A}{r_3} = \frac{V_{C_1}}{r_3} \rightarrow \varphi_3 = \frac{s_1}{r_3}.$$

Из рисунка 7 следует, что $V_D = V_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катиться» по участку нити $K_2 L$), то $V_E = 0,5V_D = 0,5\omega_3 R_3$; следовательно, и

$$\lambda_1 = s_E = 0,5\varphi_3 R_3 = 0,5s_1 \frac{R_3}{r_3}$$

При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2 \quad (13)$$

Подставляя выражения (11) и (13) в уравнение (6) и учитывая, что $T_0 = 0$, придём к равенству:

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - \frac{M}{r_3} s_1 - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \quad (14)$$

Из равенства (14), подставив в него числовые значения заданных величин, найдём искомую угловую скорость ω_3 :

$$\omega_3 = 8,1 \text{ c}^{-1}.$$

6. Плоскопараллельное движение абсолютно твёрдого тела.

Твёрдое тело будет совершать плоскопараллельное движение, если в нём существует плоское сечение, относительно которого масса тела распределена симметрично; силы, действующие на тело, расположены в плоскости этого сечения, а начальные скорости всех точек тела расположены в плоскостях, параллельных плоскости сечения.

В кинематике было установлено, что положение твёрдого тела, совершающего плоское движение, определяется тремя параметрами. За эти параметры обычно выбирают координаты центра масс тела и угол поворота тела относительно оси, перпендикулярной к рассматриваемому плоскому сечению тела.

Уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела представляют собой систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \sum_{k=1}^n N_{kx}, \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n N_{ky}, \quad J_{Cz} \varepsilon = \sum_{k=1}^n m_{Cz}(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n m_{Cz}(\bar{N}_k), \quad (1)$$

где F_{rx}^e, F_{ky}^e - проекции внешних активных сил на оси Ox и Oy ; N_{kx}, N_{ky} - проекции реакций на оси Ox и Oy ; $m_{Cz}(\bar{F}_k^e)$ и $m_{Cz}(\bar{N}_k)$ - моменты соответственно внешних активных сил и сил реакций относительно центра масс; x_C, y_C - координаты центра масс C ; $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение вращения около оси Cz ; φ - угол поворота тела вокруг оси Cz .

Пример 7. Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиуса R и весом P начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона α ; на барабан действуют сила $\bar{F}$ и пара сил с моментом M .

Дано: $P, F = 0,8P, M = 1,1PR, \alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ$.

Определить: 1) $x_C = f(t)$ - закон движения центра масс барабана;

2) $f_{\min}$ - наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

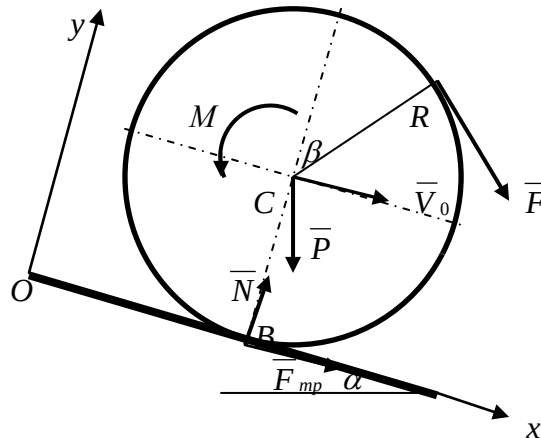


Рис. 8

Решение.

Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил:

$\vec{P}, \vec{F}, \vec{N}, \vec{F}_{mp}$ и момента M . Так как направление силы трения $\vec{F}_{mp}$ заранее неизвестно, то выбираем его произвольно. Введём прямоугольную систему координат Oxy как показано на рисунке 8. Составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения (1) в данном случае:

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F \cos \beta + P \sin \alpha + F_{mp}; \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = N - P \cos \alpha - F \sin \beta; \quad (3)$$

$$m \frac{R^2}{2} \varepsilon = FR - F_{mp} R - M. \quad (4)$$

За положительное направление для моментов принято направление по ходу часовой стрелки, то есть в ту сторону. Куда будет вращаться барабан при движении центра C от оси Oy .

1) Найдём $x_C = f(t)$. Так как в данной задаче $y_C = R = \text{const}$, то $\frac{d^2 y_C}{dt^2} = 0$, тогда

уравнения (2)–(4) содержат четыре неизвестные величины: $\frac{d^2 x_C}{dt^2}, \varepsilon, N, F_{mp}$.

Поэтому необходимо найти ещё одно соотношение, связывающее эти величины. Для этого учтём, что $\ddot{x}_C = a_C$ (так как центр C движется прямолинейно) и что при качении без скольжения в точке B находится мгновенный центр скоростей. Тогда

$$V_C = \omega R, \quad a_C = \dot{V}_C = \dot{\omega} R = \varepsilon R \quad \text{или} \quad x_C = \varepsilon R. \quad (5)$$

Теперь из уравнения (4) можно исключить ε , подставив в (4) найденное значение εR ; разделив обе части уравнения (4) на R , получим:

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F - F_{mp} - \frac{M}{R}. \quad (6)$$

Далее, почленно равенства (2) и (6), исключим из них F_{mp} и получим:

$$\frac{3}{2} m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F(1 + \cos \beta) + P \sin \alpha - \frac{M}{R} = 0,8P(1 + \cos 30^\circ) + P \sin 30^\circ - 1,1P = 0,89P$$

Отсюда, так как $P = mg$, то имеем:

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0,6g. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (7), получим

$$\frac{dx_C}{dt} = 0,6gt + C_1; \quad \rightarrow \quad x_C = 0,3gt^2 + C_1 t + C_2. \quad (8)$$

Удовлетворяя начальным условиям: $t = 0$, $V_C = \dot{x}_C = 0$, $x_C = 0$ (ось Oy проходит через начальное положение точки C), найдём, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Таким образом, закон движения центра C имеет вид:

$$x_C = 0,3gt^2. \quad (9)$$

2) Найдём $f_{\min}$. При определении f исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству:

$$|F_{mp}| \leq fN. \quad (10)$$

Величину N находим из уравнения (3), учитывая, что $\ddot{y}_C = 0$, получим:

$$N = P \cos \alpha + F \sin \beta = P \cos 30^\circ + 0,8P \sin 30^\circ = 1,27P \quad (11)$$

Значение F_{mp} проще всего найти из уравнения (6), заменив в нём $\ddot{x}_C$ его значением (7). Получим:

$$0,3mg = F - F_{mp} - \frac{M}{R}. \quad (12)$$

Так как $mg = P$, то из (12) имеем:

$$F_{mp} = F - \frac{M}{R} - 0,3P = 0,8P - 1,1P - 0,3P = -0,6P. \quad (13)$$

Знак минус в выражении для F_{mp} указывает на то, что сила $\overline{F}_{mp}$ направлена противоположно показанному на рисунке 8 направлению.

Подставляя значения F_{mp} и N из равенств (13) и (11) в неравенство (10), получим:

$$0,6P \leq 1,27Pf \quad \rightarrow \quad f \geq 0,47. \quad (14)$$

Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения $f_{\min} = 0,47$.

7. Общее уравнение динамики.

При движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = 0 \quad (1)$$

(принцип Даламбера-Лагранжа),

где $\sum_{k=1}^n \delta A_k^a$, $\sum_{k=1}^n \delta A_k^u$ - сумма элементарных работ активных и сумма элементарных работ сил инерции соответственно.

Уравнение (1) называется *общим уравнением динамики*.

Пример 8. Механическая система состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2 , радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M , приложенной к блоку 1.

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30\text{н}$, $P_3 = 40\text{н}$, $P_4 = 20\text{н}$, $M = 16\text{нм}$, $R_1 = 0,2\text{м}$, $R_2 = 0,3\text{м}$, $r_2 = 0,15\text{м}$, $\rho_2 = 0,2\text{м}$.

Определить: ускорение груза 3, пренебрегая трением.

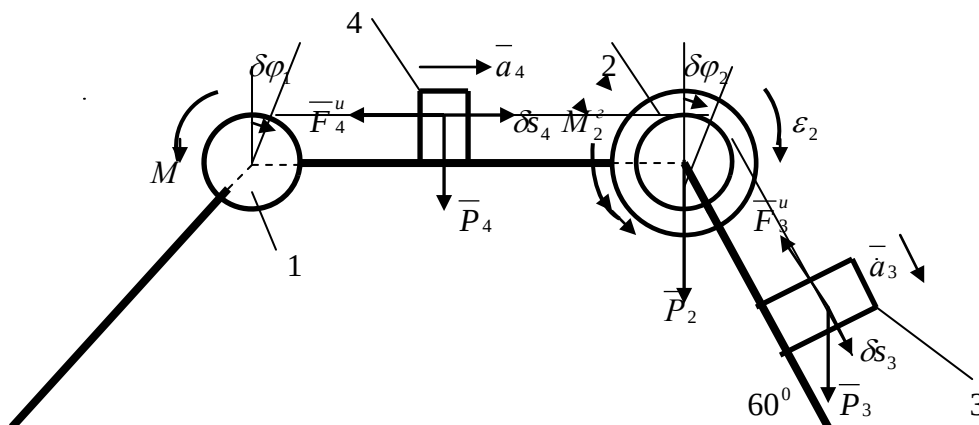


Рис. 9

Решение.

1) Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1,2,3,4, соединённых нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики (1).

2) Задавшись направлением ускорения a_3 , изображаем на рисунке 9 помимо активных сил, силы инерции $\vec{F}_3^u, \vec{F}_4^u$ и пару сил с моментом M_2^u , величины которых соответственно равны:

$$F_3^u = \frac{P_3}{g} a_3, \quad F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4, \quad M_2^u = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \quad (2)$$

3) Сообщая механической системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим:

$$(P_3 \sin 60^\circ - F_3^u) \delta s_3 - M_2^u \delta \varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M \delta \varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Выразим все перемещения через $\delta \varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta \varphi_2; \quad \delta s_4 = r_2 \delta \varphi_2; \quad \delta \varphi_1 = \frac{r_2}{R_1} \delta \varphi_2. \quad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведём его к виду:

$$[P_3 (\sin 60^\circ - \frac{a_3}{g}) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M \frac{r_2}{R_1}] \delta \varphi_2 = 0 \quad (5)$$

Входящие в (5) величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3 :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \quad a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} a_3. \quad (6)$$

Затем, учитывая, что $\delta \varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках. Из полученного в результате уравнения найдём:

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^\circ - M \frac{r_2}{R_1}}{P_3 R_2 + P_2 \frac{\rho_2^2}{R_2} + P_4 \frac{r_2^2}{R_2}} g. \quad (7)$$

Подставив в (7) числовые значения заданных величин, получим:

$$a_3 = -0,9m/c^2.$$

Знак минус указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно направлениям, показанным на рисунке 9.

Список рекомендуемой литературы

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2-х т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. - Т.1 : Статика и кинематика; Т.2: Динамика. - 11-е изд., стер. - СПб. : Изд-во "Лань", 2009. - 736 с. : ил. ; 21 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Митюшов, Е.А. Теоретическая механика. Учебник для студентов вузов./ Е.А. Митюшов, С.А. Берестова. – М.: Академия, 2006. –320 с.
3. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. –607 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Изд-во "Лань", 2010. – 448 с.
6. Статика. Электронное издание локального распространения, 060190 Э. Методическое пособие. Сост. Олышанский В.Ю., Ткаченко Г.П. СГТУ, 2005.
7. Кепе, О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике / О.Э. Кепе. – СПб.: Изд-во "Лань", 2008. – 368 с.